

推薦序（二）

數學這個領域，相對而言，更容易讓年輕人大放異彩，十九世紀英國數學家哈代(Godfrey Harold Hardy)曾經說：“mathematics, more than any other art or science, is a young man's game”；相當於數學諾貝爾獎的菲爾茲獎（Fields Medal）也只頒給 40 歲以下的數學家。這似乎說明年輕的心智特別適合在數學的天空翱翔。

然而不可諱言，數學的門檻也相對較高，要能登堂入室也並非一蹴可及。想實現展翼的夢想，需要激發飛升的動力。國高中年段或大學的年輕學子，若對數學有興趣，要如何尋找合適的課外數學書籍來厚植這股力量呢？

想要精進數學的年輕愛好者，通常不外乎透過花時間做競賽題目或設法加強基本功這兩條途徑，如若時間有限，魚與熊掌不可兼得，後者絕對是較好的選擇。因為勤練競賽題多半在現有的高度左右盤旋，長期而言對增長數學或應用數學的功力收效甚微，難以拔高。然想要紮實練功，目前書市上卻又非常欠缺能涵養數學實力的課外書，很高興國立清華大學程守慶特聘教授新出版的《數學：讀、想》，彌補了這個空缺。

本書從平面幾何經度量空間走到點集拓樸，沿途紮紮實實提供瞭解這趟旅途約略全貌所需要的重要定義和定理。有興

趣、有能力的年輕學子勉力自學或邀集同好一起研讀，可以從第一頁推進到最後一頁而不需要額外的先備知識。從數學成長的角度，參加競賽固然可砥礪檢驗學習成果，這本書提供的思考探索過程，個人認為會更有價值及收穫。基本功練紮實了，才有可能積累未來向上躍進的動能。

除了在學的學生，本書對以數學為專業的高中老師也是值得一買的優良讀物，稱職的數學老師宜對數學的橫向聯繫和縱向的深層結構有鳥瞰式的理解，以我自己為例，當年師大畢業到高中實習時，內心甚為惶恐，直到在南昌街逛書店發現台大黃武雄老師到彰中試教一年所寫下的《數學教室》一書，領受到如何提高自己立於視野清晰的制高點，受益匪淺。從國、高中數學而言，我相信這本書也能發揮此等功用，啟發在杏壇耕耘的老師如何更為有效引領學生。

這本書共含八章，前三章是古典的幾何極值問題，例如第 1 章是笛卡爾(René Descartes)所考慮的等周問題(isoperimetric problem)，作者介紹了以解析方法的算幾不等式一步步帶領大家從三角形等周問題到多邊形等周問題，然後回到一般情形的原問題，最後提出多邊形等周問題其解和原問題解的關係。這本書的書名已提示讀者讀這本書時要時時停下來多想想，想想為什麼作者是這樣講解定理？為什麼作者會做如此的評論？為什麼作者是這樣安排章節、段落？當然我也建議讀者看到問題或定理先問問自己會怎樣想，不論能否先證明，讀完之後也需反思。

第 4、5 章是講解一些重要數列以及和其相關的問題。第 4 章是討論如何對平面上給定的多邊形做適當的切割，因此而生成的多邊形面積成等差數列。第 5 章是著名的斐波那契數列。作者引進線性映射的觀點來討論此數列的一般解，同時也做了

多角度的討論和推廣，例如作者討論了如何將一個 k 階（此處 k 大於等於 2）的線性遞迴數列，從線性映射的觀點推廣出去而得到這種數列的一般解。

第 6 章介紹幾何物體或圖形之間如何比較「大小」，此處所謂大小通常指的是這些物體誰的「點」「多」。比方說線段與長方形誰的點多。這問題大家可先想想：什麼是線段或長方形的「點」？又要如何呈現出來？什麼是「多」？尤其此兩種圖形構成的點都是無窮多。這些問題後來由伯恩斯坦（Felix Bernstein）和施洛德（Ernst Schröder）等人的研究貢獻，在集合論有了比較清晰的脈絡可尋。作者以簡明清晰的表達帶領大家走過這段歷史時空。

第 7 章和第 8 章帶領大家體會數學如何從早期的歐氏空間的距離概念往更廣義方向推廣的思維，在第 7 章中因而引進所謂的度量空間（metric space），這樣的思維往往也會對問題做一個整合和簡化，一些特殊度量空間和函數定義在度量空間的一些重要性質將有所介紹。在第 8 章中再度做某種層次的推廣到所謂的拓樸空間，意即在度量空間所謂兩個元素多逼近彼此是以某種度量或距離概念來描述，但這個概念可以適度地推廣，並不需要有距離的概念，而是以公設化的架構也可表達逼近的概念。這章節主要問題是哪些度量空間的性質推廣至拓樸空間可以保持？哪些不能？這兩章在抽象或深度的層次，對高中生而言是一個大躍進，雖然困難卻是極有意義的挑戰。

交大前校長張懋中先生在天下雜誌 2019 年的一篇專欄中有感而發，為什麼台灣員工只會解決問題，但缺少會定義問題的人，這是台灣教育體制下的大哉問。在此我想先從學習者角度出發，要能定義問題，需先培養敢問敢想任何（笨）問題的態度，自然也要從紮實的基本功訓練著手。當然即便一本

好書如果讀的方法和態度不當，成效還是有限。讀這本書時，在每個適當時機點都得先停下來問自己：為何會如此想，要如何推廣，如何問下一個問題，然後反思。我想這該是守慶教授將「讀、想」放入本書書名內的部分原因。

守慶教授是台灣少數不但能在世界頂級數学期刊發表論文，而且同時也有能力合寫由美國數學學會（American Mathematical Society）和 International Press 出版的研究所專書的專業數學家，他在研究教學兩忙之餘，出版這本能深化思考、培育數學素養的數學課外書，誠屬不易。我和守慶教授除是數學同行，兩人的子女過去還是三年高中同窗，如果當年有像這樣的數學練功寶冊，高中數學的演練想必另有不同的光影，期待此書的出版能讓數學同好撞擊出更亮眼的火花，扶搖而上九千里指日可待。

國立交通大學應用數學系特聘教授

莊重

2020 年 10 月 23 日